第27卷 第4期　　工　程　数　学　学　报　　Vol. 27 No. 4
2010年08月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0715-05

基于 α-型相对信息的模糊散度*

兰　蓉[1]，范九伦[2]

(1- 西安电子科技大学电子工程学院，西安　710071;
2- 西安邮电学院通信与信息工程学院，西安　710121)

摘　要: 模糊散度可用于度量两个模糊集之间的差别。本文基于 α-型相对信息提出两类新的模糊散度，并借助 Csiszar 提出的 f-散度观点对这两类模糊散度的性质进行研究。这两类模糊散度所具有的性质显示它们均为模糊集上的区别度。

关键词: 模糊散度；α-型相对信息；区别度

分类号: AMS(2000) 68T10; 03E10　　**中图分类号**: O235　　**文献标识码**: A

1　引言

Shannon 熵是信息论中最基本的概念，主要用于描述概率分布的不确定性。源于 Shannon 熵的散度可用于度量概率分布之间的差别，其中 Kullback 和 Leibler 使用对数运算给出的 K-L 散度 (有向散度、相对熵和交叉熵) 是最常用的一个。K-L 散度已经成为信息论中的基本概念，并被广泛应用于数学学科、信息学科和管理学科等多个领域。1961 年，Renyi[1] 给出 K-L 散度带参数的推广形式。此后，Sharma 和 Autar[2] 提出另一种推广形式。需要指明，K-L 散度的这两种推广形式均是 Csiszar[3] 所提出的 f-散度 (Csiszar's f-divergence)。此外，Taneja 和 Kumar[4] 提出 K-L 散度的一种一般化形式，称作 α-型相对信息 (relative information of type α)，并以 Csiszar 的 f-散度的观点对其性质进行研究。

为了度量两个模糊集之间的差别，Bhandari[5,6] 基于 K-L 散度引入了对数型模糊散度，并将其应用于图像分割。我们给出一种指数型模糊散度[7]，Charia 和 Ray[8] 将该指数型模糊散度成功地应用于图像分割。本文的目的是基于 α-型相对信息，提出两类新的模糊散度，并讨论这两类模糊散度的性质，指出这样定义的模糊散度是 χ^2-模糊散度[9] 的推广。

2　基于 α-型相对信息的模糊散度

在本文中，$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$。下面，先介绍模糊集理论的基本概念[9]。

定义1　设 X 为论域，则 X 上的模糊集 A 可表示为 $A = \{(x, \mu_A(x)) \,|\, x \in X\}$，其中映射 $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ 称为模糊集 A 的隶属度函数。模糊集 A 的补集 A^c 可表示为 $A^c = \{(x, 1-\mu_A(x)) \,|\, x \in X\}$。我们用 $F(X)$ 表示 X 上全体模糊集之集，$P(X)$ 表示 X 上全体经典集之集。

定义2　称映射 $d : F(X) \times F(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 为 $F(X)$ 上的区别度，若 d 满足以下条件:

1)　$d(A,B) = d(B,A)$，对任意的 A, $B \in F(X)$；

2)　$d(A,A) = 0$，对任意的 $A \in F(X)$；

收稿日期: 2009-02-04.　**作者简介**: 兰蓉 (1977年12月生)，女，讲师. 研究方向：智能信息处理与模式识别.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (60572133)；陕西省教育厅科研计划项目 (09JK720).

3) $d(G,G^c)=\max\limits_{A,B\in F(X)} d(A,B)$，对任意的 $G\in P(X)$；

4) 对任意的 $A,B,C\in F(X)$，若 $A\subseteq B\subseteq C$，则 $d(A,B)\le d(A,C)$ 且 $d(B,C)\le d(A,C)$。

设

$$\Delta_n=\big\{P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\,|\,p_i>0,\ \Sigma_{i=1}^n p_i=1\big\},\quad n\ge 2$$

为完备的有限离散概率分布之集。Kullback 和 Leibler 给出对数型相对信息。1961 年，Renyi[1] 将其推广为带参数的一般形式。文献 [2] 又给出如下的推广，称作 α-型相对信息，具体定义为：对任意的 $P,\ Q\in\Delta_n$，有

$$K_\alpha(P\,\|\,Q)=\frac{1}{\alpha-1}\Big(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha q_i^{1-\alpha}-1\Big), \tag{1}$$

其中 $\alpha>0$ 且 $\alpha\neq1$。

注 1　$\alpha=2$ 时，(1) 式蜕化为 χ^2-散度[9]，即

$$\chi^2(P\,\|\,Q)=\sum_{i=1}^n\frac{(p_i-q_i)^2}{q_i}=K_2(P\,\|\,Q).$$

由于 $\alpha=2$ 时，α-型相对信息即为 χ^2-散度。因此，我们借鉴 α-型相对信息的定义方式，将 χ^2-模糊散度推广得到更为一般的模糊散度。

设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则对任意的 $A,\ B\in F(X)$，A 区别于 B 的期望信息量可用

$$K_{1\alpha}(A,B)=\frac{1}{\alpha-1}\sum_{i=1}^n\mu_A(x_i)\bigg(\Big(\frac{\mu_A(x_i)}{\mu_B(x_i)}\Big)^{\alpha-1}-1\bigg),\quad \alpha>0,\quad \alpha\neq1$$

来度量。考虑到 $A^c,\ B^c$ 之间的差别应与 $A,\ B$ 之间的差别相同，于是模糊散度可定义为

$$K_\alpha(A,B)=K_{1\alpha}(A,B)+K_{1\alpha}(A^c,B^c).$$

由于 $K_\alpha(A,B)$ 的定义中没有考虑到分明集的情形，故对 $K_\alpha(A,B)$ 作如下两种修改

$$K_\alpha'(A,B)=\frac{1}{\alpha-1}\sum_{i=1}^n\bigg(\frac{(1+\mu_A(x_i))^\alpha}{(1+\mu_B(x_i))^{\alpha-1}}+\frac{(2-\mu_A(x_i))^\alpha}{(2-\mu_B(x_i))^{\alpha-1}}-1\bigg),$$

$$K_\alpha''(A,B)=\frac{1}{\alpha-1}\sum_{i=1}^n\bigg(\frac{2^{\alpha-1}\mu_A^\alpha(x_i)}{(\mu_A(x_i)+\mu_B(x_i))^{\alpha-1}}+\frac{2^{\alpha-1}(1-\mu_A(x_i))^\alpha}{(2-\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^{\alpha-1}}-1\bigg).$$

一般的，$K_\alpha'(A,B)\neq K_\alpha'(B,A)$ 且 $K_\alpha''(A,B)\neq K_\alpha''(B,A)$，故对称的模糊散度定义为

$$D_1(A,B)=K_\alpha'(A,B)+K_\alpha'(B,A),\quad \alpha>0,\quad \alpha\neq1, \tag{2}$$

$$D_2(A,B)=K_\alpha''(A,B)+K_\alpha''(B,A),\quad \alpha>0,\quad \alpha\neq1. \tag{3}$$

特别地，当 $\alpha=2$ 时，(2) 式与 (3) 式即蜕化为对称的 χ^2-模糊散度。

3 两类α-型模糊散度的性质

下面，我们将对$D_1(A,B)$和$D_2(A,B)$的性质进行讨论。设映射$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$为凸函数，Csiszar给出的散度[3]定义为

$$C_f(p,q)=\sum_{i=1}^{n}q_i f\Big(\frac{p_i}{q_i}\Big),\quad p,\,q\in\mathbb{R}_+^n.$$

关于f-散度，下面的两个引理成立。

引理1 (联合凸性定理) 设映射$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$为凸函数，则$C_f(p,q)$是关于$p$, q的联合凸函数，其中$p,\,q\in\mathbb{R}_+^n$。

引理2 (Jensen不等式) 设映射$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$为凸函数。对任意的$p,\,q\in\mathbb{R}_+^n$，记

$$P_n=\Sigma_{i=1}^{n}p_i>0,\quad Q_n=\Sigma_{i=1}^{n}q_i>0,$$

则下面的不等式成立

$$C_f(p,q)\geq Q_n f\Big(\frac{P_n}{Q_n}\Big),$$

其中等号“=”成立当且仅当

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}=\cdots=\frac{p_n}{q_n}.$$

特别地，对任意的$p,\,q\in\Delta_n$，有$C_f(p\,\|\,q)\triangleq C_f(p,q)\geq f(1)$，其中“=”成立当且仅当$P=Q$。

首先，使用上述两个引理对$D_1(A,B)$的性质进行讨论。

对于$D_1(A,B)$，在单点x_i处，若取

$$p=\big(1+\mu_B(x_i),\,2-\mu_B(x_i),\,1+\mu_A(x_i),\,2-\mu_A(x_i)\big),$$

$$q=\big(1+\mu_A(x_i),\,2-\mu_A(x_i),\,1+\mu_B(x_i),\,2-\mu_B(x_i)\big).$$

映射$f_1:[0,\infty)\to\mathbb{R}$定义为

$$f_1(t)=\frac{1}{\alpha-1}\Big(t^{1-\alpha}-\frac{1}{3}\Big),\quad \alpha>0,\quad \alpha\neq 1,$$

则有

$$D_1(A,\,B;\,x_i)=\sum_{j=1}^{4}q_j f_1\Big(\frac{p_j}{q_j}\Big),$$

由$f_1''(t)=\alpha t^{-\alpha-1}\geq 0$及引理1可知，$D_1(A,B;x_i)$是关于$p,q$的联合凸函数。并且由引理2可得

$$D_1(A,\,B;\,x_i)\geq Q_n f_1\Big(\frac{P_n}{Q_n}\Big)=6f_1(1)=\frac{4}{\alpha-1},$$

当且仅当

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_3}{q_3}=\frac{p_4}{q_4},$$

即 $\mu_A(x_i)=\mu_B(x_i)$，上式中的“=”成立。由此可知 $D_1(A,B;x_i)$ 的最小值为 $\frac{4}{\alpha-1}\,(\neq 0)$，因此修正 $D_1(A,B)$，得到 $D_1'(A,B)$，并使其最小值为0

$$D_1'(A,B)=\frac{1}{\alpha-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{(1+\mu_A(x_i))^\alpha}{(1+\mu_B(x_i))^{\alpha-1}}+\frac{(2-\mu_A(x_i))^\alpha}{(2-\mu_B(x_i))^{\alpha-1}}-3\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{(1+\mu_B(x_i))^\alpha}{(1+\mu_A(x_i))^{\alpha-1}}+\frac{(2-\mu_B(x_i))^\alpha}{(2-\mu_A(x_i))^{\alpha-1}}-3\Big)\Big),\quad \alpha>0,\quad \alpha\neq 1.$$

引理3 设映射 $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}_+$ 满足对任意的 $(x,y)\in[0,1]^2$，$f(x,y)=f(y,x)$ 且 $f(x,y)=f(1-x,1-y)$，则 $f(x,y)\le f(x,z)$，当且仅当

$$f(y,z)\le f(x,z),\quad 0\le x\le y\le z\le 1.$$

引理4 设

$$f(x,y)=\frac{1}{\alpha-1}\Big(\frac{(1+x)^\alpha}{(1+y)^{\alpha-1}}+\frac{(1+y)^\alpha}{(1+x)^{\alpha-1}}$$
$$+\frac{(2-x)^\alpha}{(2-y)^{\alpha-1}}+\frac{(2-y)^\alpha}{(2-x)^{\alpha-1}}-6\Big),\quad 0\le x,y\le 1.$$

若 $0\le x\le y\le z\le 1$，则 $f(x,y)\le f(x,z)$ 且 $f(y,z)\le f(x,z)$。

限于篇幅，引理3和引理4的证明省略。下面我们给出定理1。

定理1 模糊散度 $D_1'(A,B)$ 满足以下性质：对任意的 A, B, $C\in F(X)$，有

1) $D_1'(A,B)\ge 0$, $D_1'(A,B)=0$，当且仅当 $A=B$；

2) 对任意的 $G\in P(X)$

$$D_1'(G,G^c)=\max_{A,B\in F(X)}D_1'(A,B)=\frac{2n}{\alpha-1}(2^\alpha+2^{1-\alpha}-3);$$

3) $D_1'(A,B)=D_1'(B,A)$；

4) $D_1'(A,B)=D_1'(A^c,B^c)$；

5) 若 $A\subseteq B\subseteq C$，则 $D_1'(A,B)\le D_1'(A,C)$，且 $D_1'(B,C)\le D_1'(A,C)$。

证明 由引理1和引理2可得1)成立；由引理3和引理4可得2)和5)成立；3)和4)显然成立。

为研究 $D_2(A,B)$ 的性质，构造二元函数 $h:[0,1]^2\to\mathbb{R}_+$ 如下

$$h(x,y)=\frac{2^{\alpha-1}}{\alpha-1}\Big(\frac{x^\alpha}{(x+y)^{\alpha-1}}+\frac{(1-x)^\alpha}{(2-x-y)^{\alpha-1}}+\frac{y^\alpha}{(x+y)^{\alpha-1}}+\frac{(1-y)^\alpha}{(2-x-y)^{\alpha-1}}-2^{2-\alpha}\Big).$$

引理5 设 $0\le x,y,z\le 1$，若 $0\le x\le y\le z\le 1$，则 $h(x,y)\le h(x,z)$，且 $h(y,z)\le h(x,z)$。

限于篇幅，引理5的证明省略。下面我们给出定理2。

定理2 模糊散度 $D_2(A,B)$ 满足以下性质：对任意的 $A,B,C\in F(X)$，有

1) $D_2(A,B)\ge 0$, $D_2(A,B)=0$，当且仅当 $A=B$；

2) 对任意的 $G\in P(X)$

$$D_2(G,G^c)=\max_{A,B\in F(X)}D_2(A,B)=\frac{2n}{\alpha-1}(2^{1-\alpha}-1);$$

3) $D_2(A,B)=D_2(B,A)$；

4) $D_2(A,B)=D_2(A^c,B^c)$；

5) 若 $A\subseteq B\subseteq C$，则 $D_2(A,B)\le D_2(A,C)$，且 $D_2(B,C)\le D_2(A,C)$。

由于篇幅所限，证明过程略去。

注2 由定理1，定理2可知 $D_1'(A,B)$，$D_2(A,B)$ 均为模糊集 $F(X)$ 上的区别度。

4 结论

区别度是模糊集理论中的一个基本概念，本文基于 α-型相对信息提出两类新的模糊散度，并对其相关性质进行了讨论。由此可知这两个模糊散度是区别度。模糊散度已经被成功应用于图像分割等方面，显示出优异的分割性能。本文在含参数模糊散度方面进行了探讨，所给的两类模糊散度具有良好的数学性质，下一步我们将考虑它们的实际应用问题。

参考文献：

[1] Renyi A. On measures of entropy and information[C]// Proc 4th Berk Symp Math Stat Probl, vol 1, California: University of California Press, 1961: 547-561

[2] Sharma B D, Autar R. Relative information function and their type (α,β) generalizations[J]. Metrika, 1974, 21(1): 41-50

[3] Csiszar I. Information type measures of differences of probability distribution and indirect observations[J]. Studia Math Hungarica, 1967, 2: 299-318

[4] Taneja I J, Kumar P. Relative information of type s, Csiszar's f-divergence, and information inequalities[J]. Information Sciences, 2004, 166(1-4): 105-125

[5] Bhandari D, *et al.* Fuzzy divergence, probability measure of fuzzy events and image thresholding[J]. Pattern Recognition Letters, 1992, 13(12): 857-867

[6] Bhandari D, Pal N R. Some new information measures for fuzzy sets[J]. Information Sciences, 1993, 67(3): 209-228

[7] Fan J L, Xie W X. Distance measure and induced fuzzy entropy[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 104(2): 305-314

[8] Charia T, Ray A K. Segmentation using fuzzy divergence[J]. Pattern Recognition Letters, 2003, 24(12): 1837-1844

[9] 范九伦. 模糊熵理论[M]. 西安：西北大学出版社，1999
Fan J L. The Theory of Fuzzy Entropy[M]. Xi'an: Northwest University Press, 1999

Fuzzy Divergences Based on the Relative Information of Type α

LAN Rong[1], FAN Jiu-lun[2]

(1- School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071; 2- School of Communication and Information Engineering, Xi'an Institute of Post and Telecommunications, Xi'an 710121)

Abstract: Fuzzy divergence describes the difference between two fuzzy sets. Based on the relative information of type α, two new classes of fuzzy divergence are proposed in this paper. In view of the f-divergence proposed by Csiszar, the properties of the two classes of fuzzy divergence are discussed. The notable feature of these two classes of fuzzy divergences is that they are both distance measures on fuzzy sets.

Keywords: fuzzy divergence; relative information of type α; distance measure

Received: 04 Feb 2009. **Accepted:** 31 Dec 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (60572133); the Education Department Science Research Scheme Found of Shaanxi Province (09JK720).